Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 2

Abgabe: Montag, den 29. April 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 2.1 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper und $A \in M_{n\times n}(K)$. Erinnerung: Die *zu A transponierte Matrix* $A^t \in M_{n\times n}(K)$ ist definiert durch $(A^t)_{ij} := A_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn A^t invertierbar ist. Außerdem gilt in diesem Fall $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Aufgabe 2.2 (*2+2+2 Punkte*)

Sei K ein Körper, $a, b \in K$ und f ein lineares Funktional auf K^2 gegeben durch $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Zu jedem der folgenden linearen Operatoren T sei $g = T^t(f)$. Bestimmen Sie $g(x_1, x_2)$.

(a) $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

(b) $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$

(c) $T(x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

Aufgabe 2.3 (*6 Punkte*)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass V/W versehen mit den in der Vorlesung definierten Verknüpfungen

$$(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) := (\alpha_1 + \alpha_2) + W \text{ für } \alpha_1, \alpha_2 \in V$$
$$c \cdot (\alpha + W) := (c\alpha) + W \text{ für } c \in K, \alpha \in V$$

ein K-Vektorraum ist.